Problème

N.B. – **Les questions 5. et 6. sont indépendantes. Le candidat les traitera dans l'ordre de son choix.**
Log désigne le logarithme népérien.

1. **Déterminer le plus grand ensemble $\mathcal{D}$ de nombres réels sur lequel $\text{Log}|x+1|$ et $\text{Log}|x-3|$ existent simultanément.**

2. **Soit l'application**
$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x-4| + \text{Log}|x+1| - \text{Log}|x-3|$.

Soit g l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = |x-4|$. Démontrer que g n'est pas dérivable pour $x = 4$. Démontrer que $h = f - g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$. En déduire que f est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{4\}$ et non dérivable en $x = 4$.

Etudier les variations de f ainsi que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

3. **Démontrer qu'il existe un et un seul couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que,**
pour tout $x \neq 3$, $\dfrac{x+1}{x-3} = a + \dfrac{b}{x-3}$.

En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Log}\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right| = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right| = 0$.

Etudier ensuite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. **On appelle (C) la courbe représentative f rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de distance étant le cm.**
Démontrer que (C) admet deux asymptotes L_1 et L_2 non parallèles aux axes du repère, ayant respectivement pour équation cartésienne

$$y = x - 4 \quad \text{et} \quad y = -x + 4 \ .$$

Tracer L_1 et L_2 , ainsi que les deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 parallèles à l'un des axes. Dessiner (C) et placer les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 4, ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.

5. **α étant un réel appartenant à $[0 , 3[$, calculer successivement,**

$$\int_0^\alpha \text{Log}(x+1)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha \text{Log}(-x+3)\,dx \ .$$

(On pourra utiliser l'intégration par parties).